PROBABILITÉS ET STATISTIQUES MATHÉMATIQUES

DURÉE : 1 h 30

N.B. — *Les candidats sont priés :*

1° *D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement,* de respecter les notations de l'énoncé.

2° *De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.*

3° *De donner les résultats encadrés.*

EXERCICE I

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4\ y = 32\ e^{4x}$. Montrer qu'il existe une solution unique, que l'on déterminera, dont la dérivée s'annule pour :

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = \ln 2$$

N.B. — La notation ln désigne le logarithme népérien.

EXERCICE II

Un laboratoire fabrique un test pour détecter des souris malades. Des essais montrent que :

1° 96 fois sur 100, le test donne un résultat positif alors que la souris est vraiment malade.

2° 94 fois sur 100, le test donne un résultat négatif alors que la souris n'est pas malade.

Dans une population de souris comprenant 3 % de souris malades, on essaie le test sur une souris et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade? Qu'en concluez-vous?

EXERCICE III

Dans une coopérative laitière, le lait est mis en emballage carton d'un litre par une machine conditionneuse et les poids de ces « boîtes de lait » se répartissent suivant la loi normale de moyenne 1 050 g et d'écart-type 20 g.

1° Quelle est la probabilité pour que le poids d'une boîte soit compris entre 1 030 g et 1 080 g?

2° Combien peut-on présumer qu'il y aura de boîtes dont le poids soit inférieur à 1 020 g dans un lot de 1 000 boîtes?

3° Une autre machine met ces boîtes, par paquets de 10, sous film plastique résistant. Les machines étant en état de marche normale, on prélève, au hasard, un certain nombre de paquets pour mesurer le poids moyen d'un carton d'un litre. Si X est le poids moyen d'un carton dans un échantillon de 10, quelle est la loi suivie par X? Quelle est la probabilité pour qu'un poids moyen observé s'écarte de la valeur moyenne de plus de 1 % de cette valeur?

4° Quelques semaines plus tard, on pèse un paquet de 10 cartons. Le résultat de la pesée est 10 750 g. Faut-il, ou non, réviser le fonctionnement de la conditionneuse?

.../...